

## Capitolul II. Reducerea sistemelor de forțe

Toate operațiile definite în cadrul algebrei vectorilor liberi prezentate în Capitolul I vor fi extinse în prezentul capitol pentru vectorii alunecători și legați. Acest calcul se deosebește de cel specific vectorilor liberi; operațiile definite pentru vectori liberi, vor trebui efectuate în cazul vectorilor alunecători în punctul comun de intersecție al suporturilor vectorilor alunecători, iar în cazul vectorilor legați, în punctul comun de aplicație al vectorilor respectivi. Calculul vectorial se aplică atât forțelor care acționează asupra corpurilor cât și altor mărimi care pot fi reprezentate prin vectori alunecători și legați.

Referitor la forțele ce acționează asupra corpurilor, acestea vor fi reprezentate fie prin vectori alunecători, fie prin vectori legați. Spre exemplu:

- forțele care acționează asupra unui corp rigid pot fi reprezentate prin vectori alunecători; punctul de aplicație al unei forțe poate fi deplasat pe suportul ei fără ca efectul pe care forța îl are asupra corpului rigid să se schimbe;
- forțele care acționează asupra unui corp asimilat cu un punct material pot fi reprezentate prin vectori legați.

Momentul unui vector în raport cu un punct.

Momentul unui vector legat  $\vec{F}$  în raport cu polul 0 (sau momentul polar al vectorului  $\vec{F}$ ) se definește ca produsul vectorial dintre vectorul de poziție al punctului de aplicație al vectorului  $\vec{F}$  și vectorul  $\vec{F}$ .

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{OA} \times \vec{F} \quad (2.1)$$

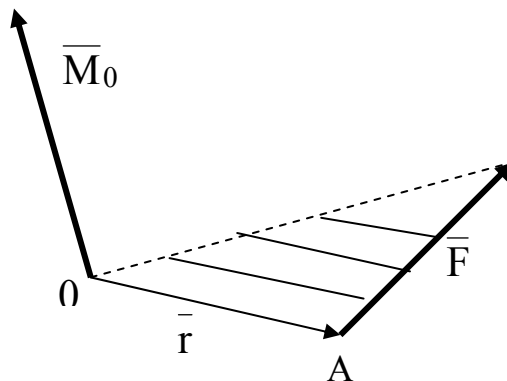


Fig. 2.1.

Momentul unui vector alunecător  $\vec{F}$  în raport cu polul 0 (sau momentul polar al vectorului  $\vec{F}$ ) se definește ca produsul vectorial dintre vectorul de poziție al unui punct oarecare al suportului vectorului  $\vec{F}$  și vectorul  $\vec{F}$ .

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{OA} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.2)$$

Relația (2.2) evidențiază faptul că momentul polar  $\vec{M}_0$  are caracteristicile și proprietățile produsului vectorial, adică:

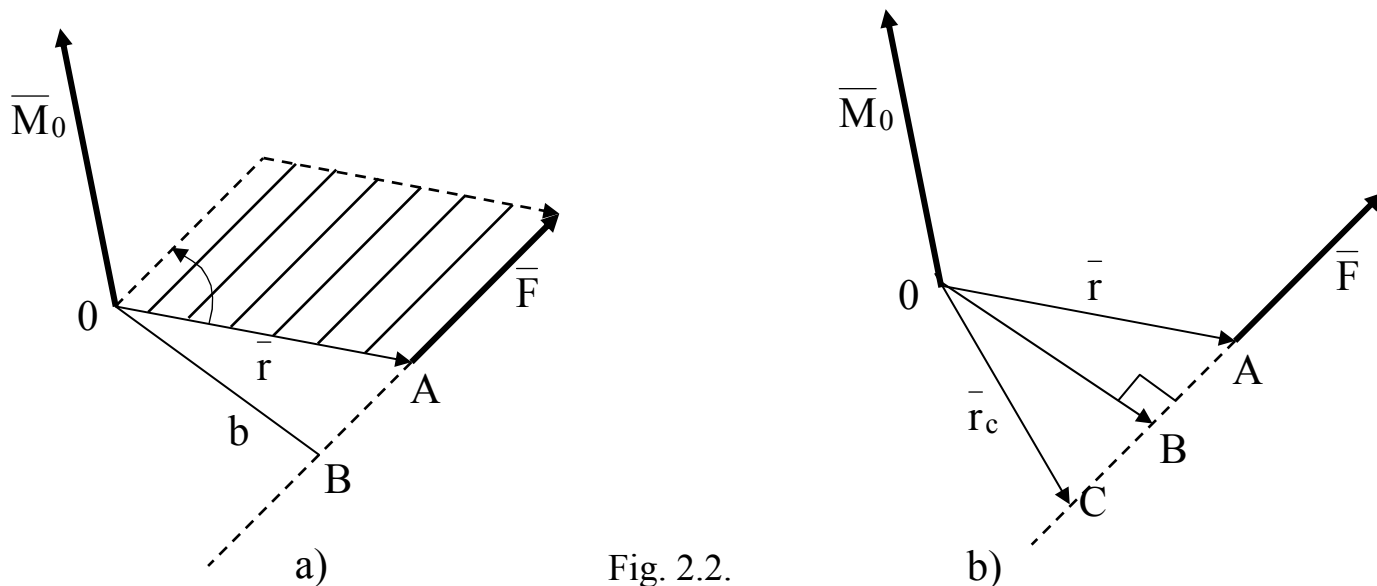


Fig. 2.2.

- este perpendicular pe planul format de vectorii  $\vec{F}$  și  $\vec{r}$ ;
- sensul este dat de regula burghiului drept;
- mărimea este dată de relația:

$$|\overline{M}| = |\overline{r}| \cdot |\overline{F}| \sin(\overline{r}, \overline{F}) = b \cdot |\overline{F}| \quad (2.3)$$

unde  $b$  este brațul: mărimea perpendicularei dusă din pol pe suportul vectorului  $\overline{F}$  (fig. 2.2.a);

- este nul atunci când suportul vectorului trece prin pol.

Proprietățile momentului polar.

1. Momentul polar al unui vector alunecător nu se modifică dacă vectorul glisează pe suportul său. Acest lucru rezultă din definiția momentului polar; dacă vectorul  $\overline{F}$  alunecă pe suportul său astfel încât punctul său de aplicație din  $A$  ajunge în  $C$ , atunci se pot scrie relațiile:

$$\overline{OA} \times \overline{F} = (\overline{OC} + \overline{CA}) \times \overline{F} = \overline{OC} \times \overline{F} + \overline{CA} \times \overline{F} = \overline{OC} \times \overline{F},$$

vectorii  $\overline{CA}$  și  $\overline{F}$  fiind coliniari ( $\overline{CA} = \lambda \overline{F}$ ), produsul lor vectorial este nul (fig. 2.2.b).

2. Momentul polar al unui vector alunecător sau legat, depinde de poziția polului, adică se modifică la schimbarea polului (fig. 2.3)(cu condiția ca această schimbare să nu aibă loc pe o dreaptă polară cu suportul vectorului considerat).

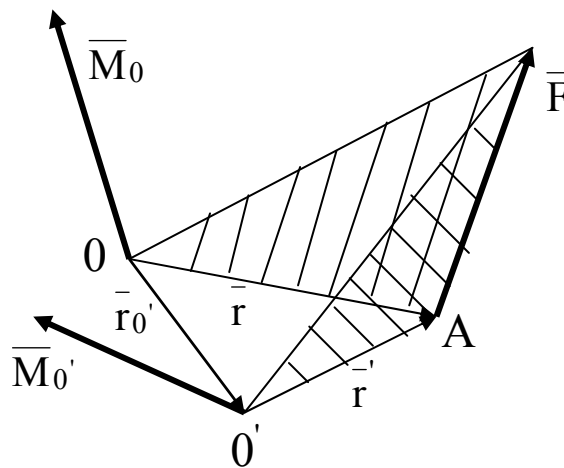


Fig. 2.3.

$$\bar{M}_0' = \bar{r}' \times \bar{F} = (\bar{r} - \bar{r}_0') \times \bar{F} = \bar{r} \times \bar{F} - \bar{r}_0' \times \bar{F};$$

$$\bar{M}_0' = \bar{M}_0 - \bar{r}_0' \times \bar{F} \quad (2.4)$$

Formula (2.4) de variație a momentului polar la schimbarea polului conduce la concluzia că momentul polar este un vector legat.

Dacă  $\bar{r}_0' = \lambda \bar{F}$ , arunci  $\bar{M}_0' = \bar{M}_0$ , adică momentul polar nu se modifică dacă schimbarea polului are loc după o direcție paralelă cu suportul vectorului considerat.

3. Produsul scalar dintre  $\bar{M}_0$  și  $\bar{F}$  este nul:

$$\bar{M}_0 \bar{F} = 0 \quad (2.5)$$

Deoarece momentul  $\bar{M}_0$  al vectorului  $\bar{F}$  este perpendicular pe vectorul  $\bar{F}$ .

Expresia analitică a momentului polar.

a) Cazul spațial.

Momentul polar al unui vector ce are o orientare oarecare în spațiu, se calculează în funcție de proiecțiile vectorului  $\bar{F}\{F_X, F_Y, F_Z\}$  pe axele reperului 0xyz și de coordonate x, y, z ale unui punct A de pe suportul său (în particular punctul de aplicație al vectorului) (fig. 2.4).

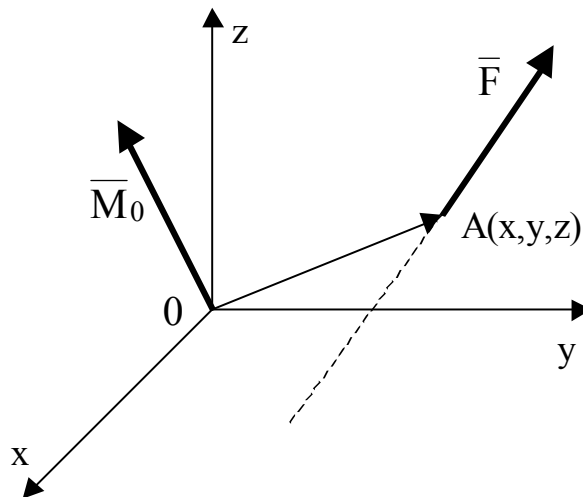


Fig. 2.4.

$$\begin{aligned}\bar{M}_0 = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{OA} \times \bar{F} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\bar{i} + (zF_x - xF_z)\bar{j} + (xF_y - yF_x)\bar{k} \equiv \\ &\equiv M_x \bar{i} + M_y \bar{j} + M_z \bar{k} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Proprietățile momentului polar pe axe se numesc momentele axiale ale vectorului  $\bar{F}$  în raport cu axele de coordonate și are următoarele expresii:

$$M_x = \bar{M} \bar{i} = yF_z - zF_y; \quad M_y = \bar{M} \bar{j} = zF_x - xF_z; \quad M_z = \bar{M} \bar{k} = xF_y - yF_x \quad (2.7)$$

Relația de ortogonalitate între vectorul  $\bar{F}$  și momentul său  $\bar{M}_0$  se exprimă analitic prin expresia:

$$\bar{M} \bar{F} = M_x F_x + M_y F_y + M_z F_z = 0 \quad (2.8)$$

Cu ajutorul momentelor axiale (a proiecțiilor momentului polar pe axele reperului 0xyz) se pot determina mărimea și cosinusurile lui directoare care precizează orientarea sa în reperul 0xyz:

$$|\bar{M}_0| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad (2.9)$$

$$\cos(\bar{M}_0, \bar{i}) = \frac{M_x}{|\bar{M}|}; \quad \cos(\bar{M}_0, \bar{j}) = \frac{M_y}{|\bar{M}|}; \quad \cos(\bar{M}_0, \bar{k}) = \frac{M_z}{|\bar{M}|};$$

b) Cazul plan.

Dacă se consideră vectorul  $\bar{F}$  situat în planul de coordonate 0xy

$$\bar{F} = F_x \bar{i} + F_y \bar{j}; \quad \bar{OA} = \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} \quad \text{atunci momentul său față de polul}$$

axelor va fi orientat după axa 0z (fig. 2.5.), adică:

$$\bar{M}_0 = \bar{OA} \times \bar{F} = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = (xF_y - yF_x)\bar{k} = M_z \bar{k} \quad (2.10)$$

$$\text{unde: } M_z = \tilde{M} = \pm |\vec{M}| = \pm b \cdot |\vec{F}| \quad (2.11)$$

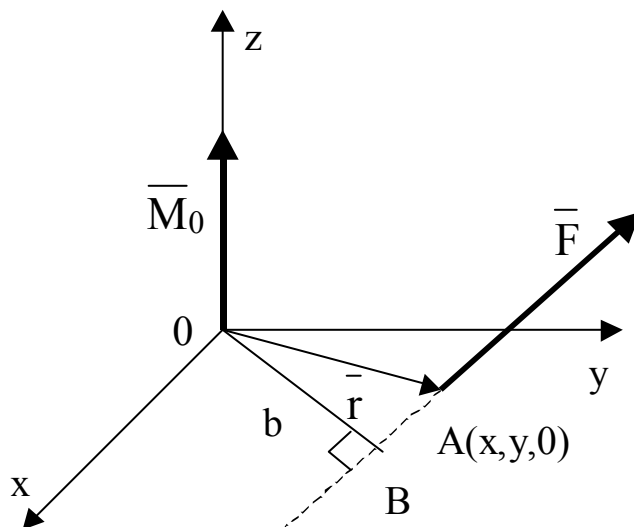
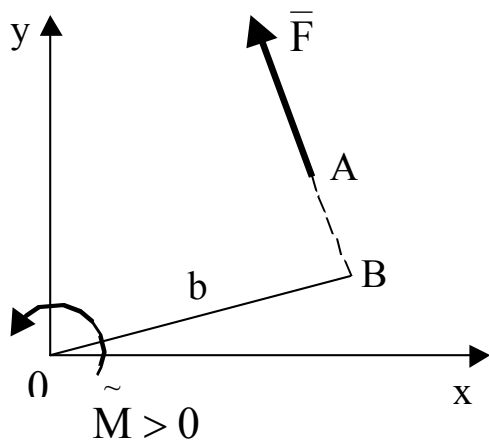
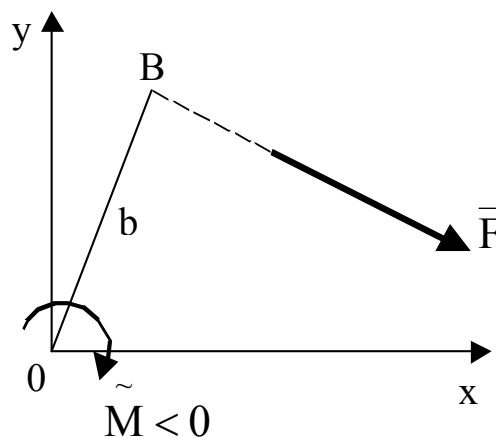


Fig. 2.5.

Semnul valorii scalare  $\tilde{M}$  a momentului polar în cazul plan se stabilește după regula observatorului (fig. 2.6).



a)



b)

Fig. 2.6.

Valoarea scalară a momentului unui vector alunecător situat în unul din planele de coordonate, va fi pozitivă sau negativă, după cum privim planul dinspre sensul pozitiv al axei normale la el, rotația brațului vectorului în

jurul polului considerat, efectuată în sensul indicat de vector, are sensul trigonometric (fig. 2.6.a) sau orar (fig. 2.6.b).

În concluzie, dacă vectorul  $\vec{F}$  este situat în planul de coordonate 0xy, momentul polar se va calcula cu relația:

$$\vec{M} = \tilde{M} \vec{k} = \pm b |\vec{F}| \vec{k} \quad (2.12)$$

dacă se cunosc mărimea vectorului  $|\vec{F}|$  și brațul b, sau cu relația:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = (xF_y - yF_x) \vec{k} = \tilde{M} \vec{k} \quad (2.13)$$

dacă se cunosc proiecțiile vectorului  $\vec{F} \{F_x, F_y\}$  și coordonatele unui punct de pe suport, A(x,y,0).

Se mai fac următoarele precizări:

- deoarece în cazul plan nu se figurează o a treia axă (exp. 0z), valoarea scalară a momentului se reprezintă printr-o săgeată curbilinie care indică sensul de rotație al brațului b în jurul polului în sensul indicat de vectorul  $\vec{F}$  (fig. 2.6.a, sens antiorar pentru  $\tilde{M} > 0$ ; fig. 2.6.b, sens orar pentru  $\tilde{M} < 0$ );

- regula observatorului este în deplină concordanță cu regula burghiului drept considerat situat perpendicular pe planul vectorului  $\vec{F}$  și este rotit în sensul indicat de sensul vectorului  $\vec{F}$ , sensul de înaintare al burghiului indicând sensul vectorului moment.

Sisteme de vectori.

Torsorul unui sistem de vectori.

Se consideră un sistem  $S = \{\bar{F}_i\} (i = 1, 2, \dots, n)$  de  $n$  vectori alunecători cu suporturile trecând prin punctele  $A_i (i = 1, \dots, n)$  sau un sistem de vectori legați cu punctele de aplicație  $A_i (i = 1, \dots, n)$  și un pol  $O$ .

Pentru acest sistem  $S$  de vectori se vor defini: vectorul rezultat  $\bar{\mathcal{R}}$  și vectorul moment rezultat  $\bar{\mathcal{M}}_O$ .

1. Vectorul rezultat (sau rezultantă)  $\bar{\mathcal{R}}$  este definit de relația:

$$\bar{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \quad (2.14)$$

în care vectorii  $\bar{F}_i (i = 1, \dots, n)$  din sistem sunt considerați liberi.

Vectorul rezultat  $\bar{\mathcal{R}}$  al unui sistem de vectori este egal cu suma geometrică a vectorilor din sistem, considerați liberi.

Din relația (2.14) se determină expresia analitică a vectorului rezultat:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{R}} &= \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \sum_{i=1}^n (F_{ix} \bar{i} + F_{iy} \bar{j} + F_{iz} \bar{k}) = \left( \sum_{i=1}^n F_{ix} \right) \bar{i} + \left( \sum_{i=1}^n F_{iy} \right) \bar{j} + \left( \sum_{i=1}^n F_{iz} \right) \bar{k} = \\ &= \mathcal{R}_x \bar{i} + \mathcal{R}_y \bar{j} + \mathcal{R}_z \bar{k} \end{aligned} \quad (2.15)$$

cu ajutorul căreia se pot preciza mărimea, direcția și sensul rezultantei  $\bar{\mathcal{R}}$ :

$$|\bar{\mathcal{R}}| = \sqrt{\mathcal{R}_x^2 + \mathcal{R}_y^2 + \mathcal{R}_z^2} \quad (2.16)$$

$$\text{și } \cos(\bar{\mathcal{R}}, \bar{i}) = \frac{\mathcal{R}_x}{|\bar{\mathcal{R}}|}; \quad \cos(\bar{\mathcal{R}}, \bar{j}) = \frac{\mathcal{R}_y}{|\bar{\mathcal{R}}|}; \quad \cos(\bar{\mathcal{R}}, \bar{k}) = \frac{\mathcal{R}_z}{|\bar{\mathcal{R}}|} \quad (2.17)$$



2. Vectorul moment rezultat  $\overline{\mathcal{M}}_0$  în polul 0 definit de relația:

$$\overline{\mathcal{M}}_0 = \sum_{i=1}^n \overline{\mathbf{M}}_{i_0} = \sum_{i=1}^n (\bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{F}}_i) \quad (2.18)$$

în care vectorii  $\overline{\mathbf{M}}_{i_0}$  ( $i=1\dots n$ ) sunt vectori legați,  $\bar{\mathbf{r}}_i$  ( $i=1\dots n$ ) sunt vectorii de poziție ale punctelor  $A_i$  ( $i=1\dots n$ ).

Vectorul moment rezultat  $\overline{\mathcal{M}}_0$  al unui sistem de vectori în raport cu polul 0 este egal cu suma geometrică a momentelor vectorilor față de același pol.

Din relația (2.18) se poate determina expresia analitică a momentului rezultat:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_0 &= \sum_{i=1}^n \overline{\mathbf{M}}_{i_0} = \sum_{i=1}^n (M_{ix} \bar{\mathbf{i}} + M_{iy} \bar{\mathbf{j}} + M_{iz} \bar{\mathbf{k}}) = \left( \sum_{i=1}^n M_{ix} \right) \bar{\mathbf{i}} + \left( \sum_{i=1}^n M_{iy} \right) \bar{\mathbf{j}} + \left( \sum_{i=1}^n M_{iz} \right) \bar{\mathbf{k}} = \\ &= \mathcal{M}_x \bar{\mathbf{i}} + \mathcal{M}_y \bar{\mathbf{j}} + \mathcal{M}_z \bar{\mathbf{k}} \quad (2.19) \end{aligned}$$

care va permite determinarea mărimii și orientării vectorului moment

rezultat  $\overline{\mathcal{M}}_0$ :

$$|\overline{\mathcal{M}}_0| = \sqrt{\mathcal{M}_x^2 + \mathcal{M}_y^2 + \mathcal{M}_z^2} \quad (2.20)$$

$$\text{și } \cos(\overline{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{i}}) = \frac{M_x}{|\overline{\mathbf{M}}|}; \quad \cos(\overline{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{j}}) = \frac{M_y}{|\overline{\mathbf{M}}|}; \quad \cos(\overline{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{k}}) = \frac{M_z}{|\overline{\mathbf{M}}|}; \quad (2.21)$$

Cu ajutorul proiecțiilor vectorilor  $\bar{F}_i \{F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}\}$  care compun sistemul și ale proiecțiilor momentelor polare ale lor  $\bar{M}_i \{M_{ix}, M_{iy}, M_{iz}\}$  se pot calcula proiecțiile vectorilor  $\bar{\mathcal{R}}$  și  $\bar{\mathcal{M}}_0$ :

$$\bar{\mathcal{R}} \begin{cases} \mathcal{R}_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \\ \mathcal{R}_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \\ \mathcal{R}_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}; \end{cases} \quad \bar{\mathcal{M}}_0 = \begin{cases} \mathcal{M}_x = \sum_{i=1}^n M_{ix} \\ \mathcal{M}_y = \sum_{i=1}^n M_{iy} \\ \mathcal{M}_z = \sum_{i=1}^n M_{iz} \end{cases} \quad (2.22)$$

Torsorul în polul 0 al unui sistem de vectori alunecători sau legați este format din vectorul rezultat  $\bar{\mathcal{R}}$  și vectorul moment rezultat  $\bar{\mathcal{M}}_0$  și se

notează:  $\bar{T}_0(S) = \left\{ \begin{array}{c} \bar{\mathcal{R}} \\ \bar{\mathcal{M}}_0 \end{array} \right\} \quad (2.23)$

Pentru acest sistem de vectori se mai poate calcula și produsul scalar dintre componentele torsorului  $\bar{\mathcal{R}}$  și  $\bar{\mathcal{M}}_0$ :

$$S(0) = \bar{\mathcal{R}} \bar{\mathcal{M}} = R_x \mathcal{M}_x + R_y \mathcal{M}_y + R_z \mathcal{M}_z \quad (2.24)$$

numit scalarul tronsonului în polul 0 sau trinom invariant.

$\bar{\mathcal{R}} \bar{\mathcal{M}} \neq 0$ , vectorii  $\bar{\mathcal{R}}$  și  $\bar{\mathcal{M}}_0$  nu sunt perpendiculari între ei;

$\bar{\mathcal{R}} \bar{\mathcal{M}} = 0$ , vectorii  $\bar{\mathcal{R}}$  și  $\bar{\mathcal{M}}_0$  sunt ortogonali;

Caracteristicile în polul 0 ale sistemului S de vectori alunecători sau legați sunt:

$\overline{\mathfrak{R}}$ , vectorul rezultat;

$\overline{\mathcal{M}}_0$ , vectorul moment rezultat;

$\overline{\mathbf{R}} \overline{\mathcal{M}}$  scalarul torsesorului sau trinom invariant;

Aceste caracteristici au un rol important în rezolvarea problemelor de reducere a sistemelor de vectori.

Variația torsesorului unui sistem de vectori la schimbarea polului.

Vectorul rezultat  $\overline{\mathfrak{R}}$  rămâne neschimbat, fapt ce rezultă din formula de definiție a acestuia:

$$\overline{\mathfrak{R}}_{(0)} = \overline{\mathfrak{R}}_{(0')} = \overline{\mathfrak{R}} \quad (2.25)$$

Vectorul rezultat este un vector liber.

Vectorul moment rezultat  $\overline{\mathcal{M}}_0'$  față de noul pol 0' se modifică după

$$\text{relația:} \quad \overline{\mathcal{M}}_0' = \overline{\mathcal{M}}_0 - \overline{\mathbf{r}}_0' \times \overline{\mathbf{R}} \quad (\overline{\mathbf{r}}_0' \neq \lambda \overline{\mathbf{R}}) \quad (2.26)$$

afirmație confirmată de o scurtă demonstrație:

$$\overline{\mathcal{M}}_0' = \sum_{i=1}^n \overline{\mathbf{M}}_{i0'} = \sum_{i=1}^n [\overline{\mathbf{M}}_{i0} - \overline{\mathbf{r}}_0' \times \overline{\mathbf{F}}_i] = \sum_{i=1}^n \overline{\mathbf{M}}_{i0} - \overline{\mathbf{r}}_0' \times \sum_{i=1}^n \overline{\mathbf{F}}_i = \overline{\mathcal{M}}_0 - \overline{\mathbf{r}}_0' \times \overline{\mathbf{R}}$$

În relația (2.26) pentru  $\overline{\mathfrak{R}} = \overline{\mathbf{0}}$ , rezultă  $\overline{\mathcal{M}}_0' = \overline{\mathcal{M}}_0$ .

Dacă vectorul rezultat  $\overline{\mathfrak{R}}$  al unui sistem de vectori este nul, momentul rezultat  $\overline{\mathcal{M}}$  este invariant la schimbarea polului, deci este un vector liber.

Invarianții unui sistem de vectori.

Invarianții unui sistem de vectori sunt mărimi vectoriale și scalare care nu se modifică la schimbarea polului.

1. Vectorul rezultat este un invariant (relația 2.25), fapt ce rezultă din formula lui de definiție, în care acesta se consideră vector liber.

$$\bar{\mathbf{I}}_1 = \overline{\mathfrak{R}}; \quad I_1 = |\overline{\mathfrak{R}}| \quad (2.27)$$

2. Scalarul torsorului este un invariant:

$$I_2 = \overline{\mathfrak{R}} \overline{\mathcal{M}} \quad (2.28)$$

deoarece:

$$\overline{\mathfrak{R}} \overline{\mathcal{M}}_0 = \overline{\mathfrak{R}} (\overline{\mathcal{M}}_0' + \bar{\mathbf{r}}_0' \times \overline{\mathfrak{R}}) = \overline{\mathfrak{R}} \overline{\mathcal{M}}_0' + \overline{\mathfrak{R}} (\bar{\mathbf{r}}_0' \times \overline{\mathfrak{R}}) = \overline{\mathfrak{R}} \overline{\mathcal{M}}_0'$$

3. Raportul primilor doi invarianți scalari este tot un invariant:

$$I_3 = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\overline{\mathfrak{R}} \overline{\mathcal{M}}}{|\overline{\mathfrak{R}}|} = \overline{\mathcal{M}} \frac{\overline{\mathfrak{R}}}{|\overline{\mathfrak{R}}|} = \overline{\mathcal{M}} \bar{\mathbf{i}}_{\mathfrak{R}} = \text{pr}_{\overline{\mathfrak{R}}} \overline{\mathcal{M}} \quad (2.29)$$

unde:  $\bar{\mathbf{i}}_{\mathfrak{R}} = \frac{\overline{\mathfrak{R}}}{|\overline{\mathfrak{R}}|}$  este versorul rezultantei.

Relația (2.29) conduce la o concluzie importantă și anume: la trecerea de la un pol la altul, proiecția momentului rezultat este un invariant.

Axa centrală a unui sistem de vectori.

La schimbarea polului, momentul rezultat se modifică după legea dată de relația (2.26) iar proiecția lui pe direcția rezultantei nu se modifică, fiind un invariant (relația 2.29). Concluzia este că la schimbarea polului se modifică numai componenta normală la rezultanta  $\bar{\mathbf{R}}$  a momentului rezultat  $\bar{\mathbf{M}}$  (figura 2.7).

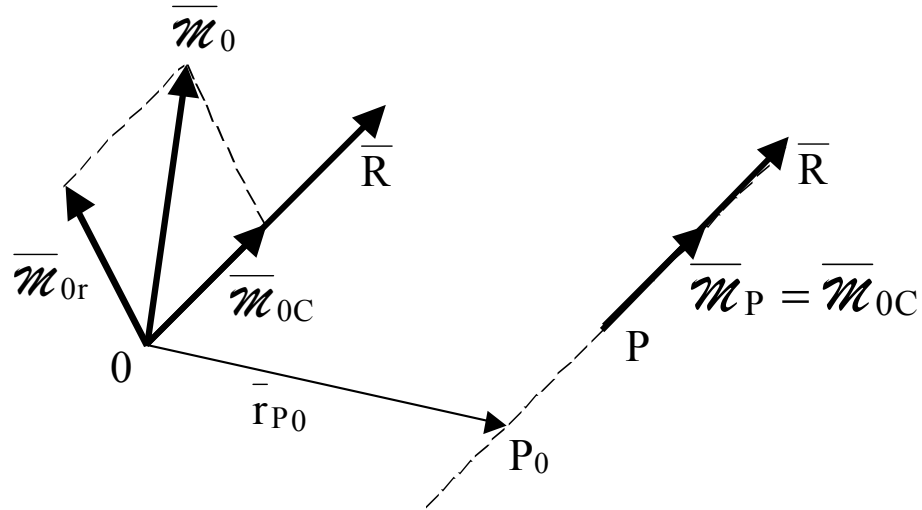


Fig. 2.7.

$$\bar{\mathbf{M}}_0 = \bar{\mathbf{M}}_{0n} + \bar{\mathbf{M}}_C \quad (2.30)$$

$\bar{\mathbf{M}}_C$  este componenta coliniară cu vectorul rezultat  $\bar{\mathbf{R}}$ ;

$\bar{\mathbf{M}}_{0n}$  este componenta normală la vectorul rezultat  $\bar{\mathbf{R}}$ ;

Se pune problema determinării poziției punctelor pentru care componenta normală a momentului rezultat în acele puncte să fie nulă; în acest caz momentul rezultat (figura 2.7), adică se verifică relația:

$$\bar{\mathbf{R}} \times \bar{\mathbf{M}}_P = 0 \quad (2.31)$$

În această relație se exprimă  $\bar{\mathbf{M}}_P$  în funcție de  $\bar{\mathbf{M}}_0$ :

$$\bar{\mathbf{R}} \times (\bar{\mathbf{M}}_0 - \bar{\mathbf{r}}_P \times \bar{\mathbf{R}}) = 0$$

Se efectuează dezvoltarea și se notează  $\lambda = \frac{\overline{\mathfrak{R}} \overline{r_p}}{\overline{\mathfrak{R}}^2}$ , obținându-se astfel

ecuația verticală a unei drepte orientate:

$$\overline{r} = \frac{\overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathcal{M}}_0}{\overline{\mathbf{R}}^2} + \lambda \overline{\mathbf{R}} \quad (2.32)$$

Această axă se numește axa centrală a sistemului de vectori alunecători, este paralelă sau coliniară cu rezultanta  $\overline{\mathfrak{R}}$ , trece prin punctul P. determinat de vectorul de poziție:

$$\overline{r_p} = \frac{\overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathcal{M}}_0}{\overline{\mathbf{R}}^2} \quad (2.33)$$

cu direcția perpendiculară pe  $\overline{\mathfrak{R}}$ .

Din figura (2.7) se observă că:

$$|\overline{\mathcal{M}}_p| = |\overline{\mathcal{M}}_{\min}| = |\overline{\mathcal{M}}_c| < \sqrt{\overline{\mathcal{M}}_{0c}^2 + \overline{\mathcal{M}}_{0n}^2} = |\overline{\mathcal{M}}_0| \quad (2.34)$$

Axa centrală a unui sistem de vectori alunecători reprezintă:

- locul geometric al punctelor în care vectorul rezultat și momentul rezultat sunt coliniari;
- locul geometric al punctelor în care momentul rezultat are valoare minimă (după cum rezultă din relația 2.34).

Din expresia analitică a ecuației vectoriale (2.32) se obțin ecuațiile scalare alei axei centrale:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\overline{\mathbf{R}}^2} (\overline{R}_y \overline{\mathcal{M}}_z - \overline{R}_z \overline{\mathcal{M}}_y) + \lambda \overline{R}_x = x_0 + \lambda \overline{R}_x \\ y &= \frac{1}{\overline{\mathbf{R}}^2} (\overline{R}_z \overline{\mathcal{M}}_x - \overline{R}_x \overline{\mathcal{M}}_z) + \lambda \overline{R}_y = y_0 + \lambda \overline{R}_y \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$z = \frac{1}{R^2} (R_x \mathcal{M}_y - R_y \mathcal{M}_x) + \lambda R_z = z_0 + \lambda R_z$$

cu următoarea formă canonică:

$$\frac{x - x_0}{\mathfrak{R}_x} = \frac{y - y_0}{\mathfrak{R}_y} = \frac{z - z_0}{\mathfrak{R}_z} \quad (2.36)$$

Momentul minim (diferit de zero) va avea următoarea expresie vectorială:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_{\min} &= \overline{\mathcal{M}}_P = \overline{\mathcal{M}}_{OC} = \overline{\mathcal{M}}_{OC} \hat{i}_R = \frac{\overline{R} \overline{\mathcal{M}} \overline{R}}{|\overline{R}| |\overline{R}|}; \\ \overline{\mathcal{M}}_{\min} &= \frac{\overline{R} \overline{\mathcal{M}}}{\overline{R}^2} \overline{R} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Rezultanta  $\overline{R}$  și momentul minim  $\overline{\mathcal{M}}_{\min}$  formează torsorul minimal al sistemului de vectori:

$$\overline{T}_{\min}(S) = \begin{cases} \overline{R} = \sum_{i=1}^n \overline{F}_i \\ \overline{\mathcal{M}}_{\min} = \frac{\overline{R} \overline{\mathcal{M}}_0}{\overline{R}^2} \overline{R} \end{cases} \quad (2.38)$$

Precizări.

a) Dacă  $\overline{R} \overline{\mathcal{M}}_0 \neq 0$  atunci  $\overline{\mathcal{M}}_{\min} \neq 0$ ,  $\overline{\mathcal{M}}_{\min} = \lambda \overline{R}$  (momentul minim este coliniar cu rezultanta).

b) Dacă  $\overline{R} = 0, \overline{\mathcal{M}}_0 \begin{cases} \neq 0 \\ = 0 \end{cases}$ ;  $\overline{R} \overline{\mathcal{M}}_0 = 0$  (momentul rezultat este

perpendicular pe rezultantă); atunci  $\overline{\mathcal{M}}_{\min} = \overline{0}$ ; în acest caz axa centrală se

definește ca locul geometric al punctelor din spațiu în care momentul rezultat are valoarea minimă zero.

c) Dacă  $\bar{\mathcal{R}} \equiv \bar{0}$ , noțiunea de axă centrală nu are sens.

### Teorema lui Varignon.

Se consideră un sistem de  $n$  vectori concurenți într-un punct  $A$  format din vectori alunecători cu suporturile concurente în  $A$  sau din vectori legați cu punctul de aplicație în  $A$  și un pol arbitrar  $O$ .

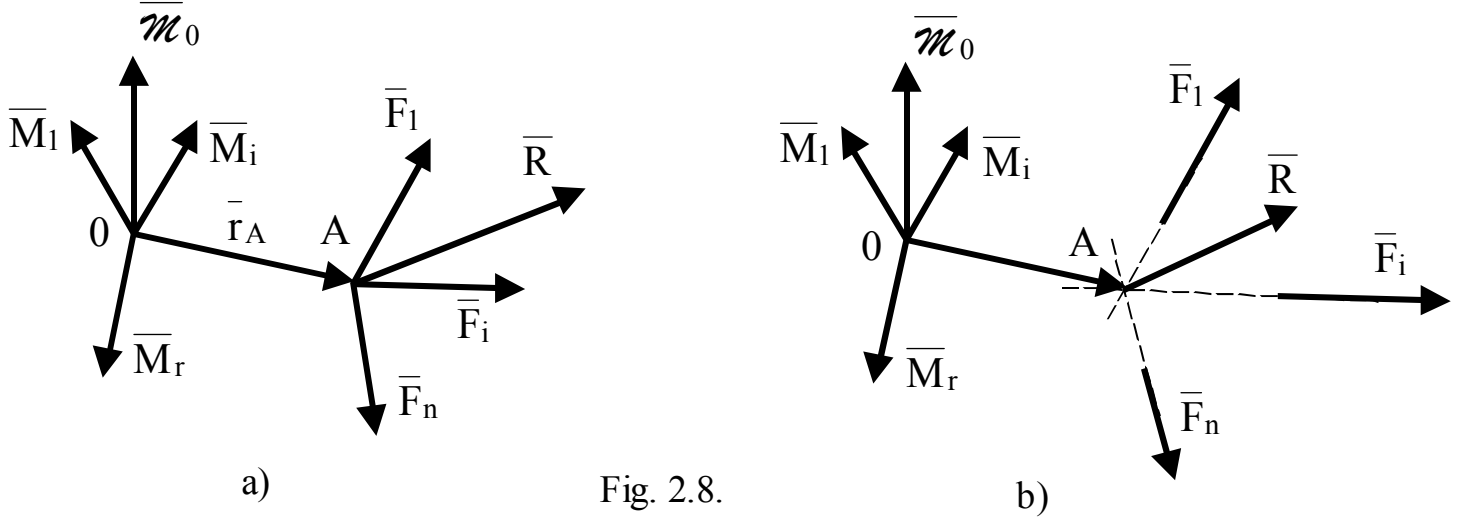


Fig. 2.8.

Torsorul acestui sistem în polul  $O$  este de forma:

$$\bar{T}_0(S) = \begin{cases} \bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \\ \bar{\mathcal{M}}_0 = \sum_{i=1}^n \bar{M}_{i0} \end{cases} \quad (2.39)$$

În cazul de față:

$$\bar{M}_{i0} = \bar{OA} \times \bar{F}_i = \bar{r} \times \bar{F}_i \quad (2.40)$$

și



$$\overline{\mathcal{M}}_0 = \sum_{i=1}^n \overline{M}_{i0} = \overline{OA} \times \sum_{i=1}^n \overline{F}_i = \overline{r} \times \overline{R} \quad (2.41)$$

$$\overline{\mathcal{M}}_0 = \overline{M}_0(\overline{R})$$

Relația obținută exprimă Teorema lui Varignon cu următoarea formulare:

Momentul rezultat față de un pol oarecare al unui sistem de vectori concurenți într-un punct este egal cu momentul rezultantei calculat în raport cu același pol.

Dacă polul este situat pe suportul rezultantei atunci momentul rezultat este nul. La acest sistem de vectori, rezultanta și momentul rezultat sunt doi vectori ortogonali:

$$\overline{R} \overline{\mathcal{M}}_0 = 0 \quad (2.42)$$

Echivalența sistemelor de vectori alunecători.

Definiție: două sisteme de vectori alunecători se numesc echivalente atunci când, evoluând în condiții identice, au același efect al acțiunii lor (în consecință pot fi înlocuite unul prin celălalt).

Operația de reducere a sistemului de vectori alunecători considerat, înseamnă operația de înlocuire a unui sistem complex de vectori alunecători cu sistemul echivalent cel mai simplu posibil.

Pentru a înțelege operația de reducere a sistemelor de vectori alunecători e necesar să se prezinte următoarele probleme:

- a) formularea principiului de echivalență;
- b) caracterizarea sistemelor simple de vectori alunecători;
- c) formularea teoremei de echivalență.

a) Formularea principiului de echivalență.

Două sisteme de vectori alunecători sunt echivalente atunci când se pot transforma unul în celălalt numai prin efectuarea a două operații elementare de echivalență:

1. înlocuirea a doi vectori cu raporturile concurente printr-un vector unic după regula paralelogramului, sau descompunerea unui vector în două componente cu suporturile concurente într-un punct de pe suportul vectorului considerat;

2. adăugarea sau suprimarea unei perechi de vectori direct opuși (vectori situați pe același suport, de aceeași mărime, și sensuri contrare).

Aceste două operații elementare de echivalență nu modifică mărimile  $\overline{\mathfrak{R}}$ ,  $\overline{\mathcal{M}}_0$  și  $\overline{\mathfrak{R}} \overline{\mathcal{M}}_0$ , fapt ce justifică denumirea acestora de caracteristici ale sistemului de vectori alunecători.

b) Caracteristicile sistemelor simple de vectori alunecători.

1. Sistemul format din doi vectori direct opuși.

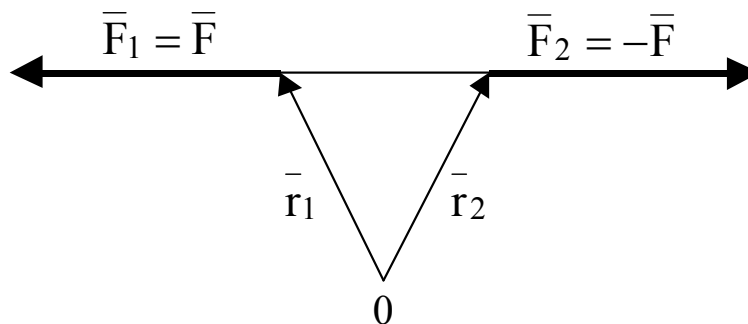


Fig. 2.9.

În acest caz caracteristicile  $\overline{\mathfrak{R}} = 0$ ,  $\overline{\mathcal{M}}_0 = 0$ ,  $\overline{\mathfrak{R}} \overline{\mathcal{M}}_0 = 0$  vor fi nule;

$$\begin{cases} \bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \bar{F} + (-\bar{F}) = 0 \\ \bar{\mathcal{M}}_0 = \bar{r}_1 \times \bar{F}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{F}_2 = \bar{r}_1 \times \bar{F} + \bar{r}_2 \times (-\bar{F}) = (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \times \bar{F} = \lambda \bar{F} \times \bar{F} = 0 \\ R\bar{\mathcal{M}}_0 = 0 \end{cases} \quad (2.43)$$

2. Sistem format din doi vectori cu suporturile paralele, de mărimi egale și de sensuri contrare (cuplu de vectori).

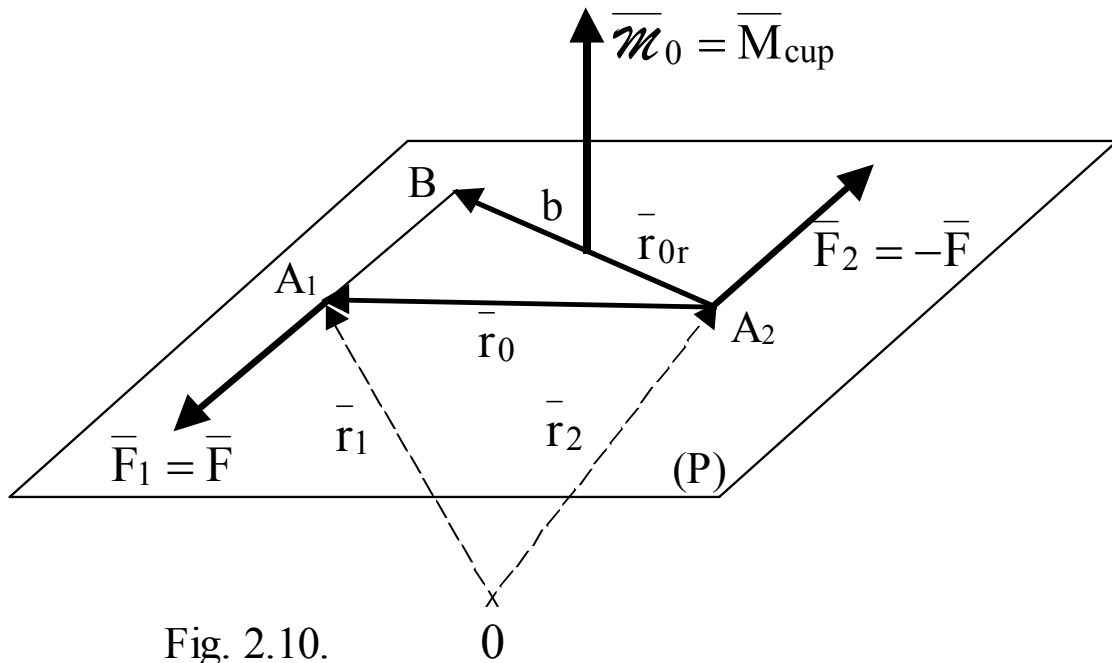


Fig. 2.10.

Caracteristicile sistemului sunt următoarele:

$$\begin{cases} \bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \bar{F} - \bar{F} = \bar{0} \\ \bar{\mathcal{M}}_0 = \bar{r}_1 \times \bar{F}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{F}_2 = \bar{r}_1 \times \bar{F} + \bar{r}_2 \times (-\bar{F}) = (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \times \bar{F} = \bar{r}_0 \times \bar{F} = \bar{M}_{\text{cup}} \neq 0 \\ R\bar{\mathcal{M}}_0 = 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

deci:

$$\bar{R} = 0, \bar{\mathcal{M}}_0 = \bar{M}_{\text{cup}} \neq 0, R\bar{\mathcal{M}}_0 = 0 \quad (2.45)$$

Momentul rezultat  $\overline{\mathcal{M}}_0 = \overline{M}_{\text{cup}}$  numit și momentul cuplului are expresia vectorială:

$$\overline{\mathcal{M}}_0 = \overline{M}_{\text{cup}} = \overline{r}_0 \times \overline{F} \quad (2.46)$$

și mărimea

$$|\overline{M}_{\text{cup}}| = b \cdot |\overline{F}| \neq 0 \quad (2.47)$$

Rezultă că momentul cuplului este un vector liber ( $\overline{r}_0$ ,  $b$  și  $\overline{F}$  nu depind de pol).

Din aceeași relație de calcul a lui  $\overline{M}_{\text{cup}}$  mai rezultă:

- momentul cuplului este normal la planul cuplului (planul determinat de vectorii  $\{\overline{F}, -\overline{F}\}$ );
- sensul momentului respectă regula burghiului drept cu privire la sensurile vectorilor cuplului.

3. Sistem format din doi vectori cu suporturile concurente (sistem echivalent cu un vector unic).

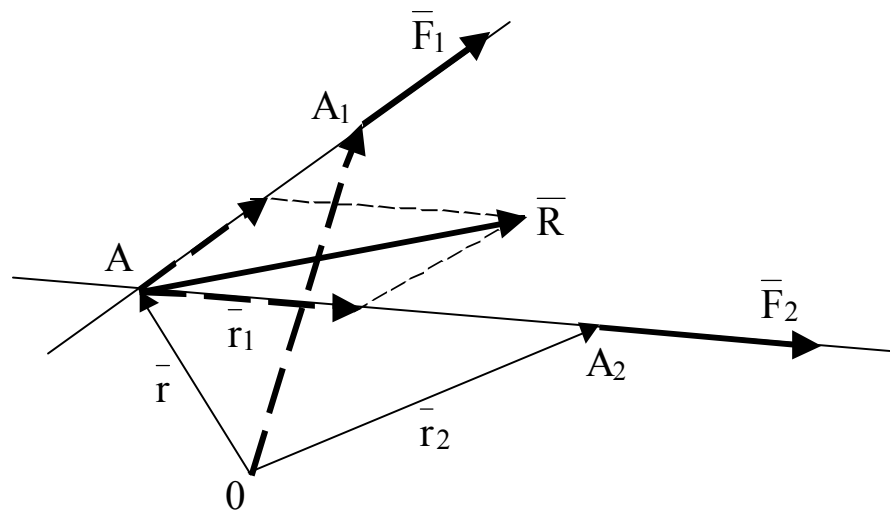


Fig. 2.11.

Caracteristicile sistemului sunt următoarele:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{F}}_1 + \bar{\mathbf{F}}_2 \neq 0 \\ \bar{\mathcal{M}}_0 = \bar{\mathbf{M}}_1 + \bar{\mathbf{M}}_2 = \bar{\mathbf{r}} \times (\bar{\mathbf{F}}_1 + \bar{\mathbf{F}}_2) = \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{M}}_0(\bar{\mathbf{R}}) \\ \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathcal{M}}_0 = \bar{\mathbf{R}}(\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{R}}) = 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

Acest sistem, cu caracteristicile date de relațiile (2.48) este echivalent cu un vector unic (sau rezultantă unică):

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{R}} \neq 0 \\ \bar{\mathcal{M}}_0 = \bar{\mathbf{M}}_0(\bar{\mathbf{R}}) \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases} \\ \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathcal{M}}_0 = 0 \end{cases} \quad (2.49)$$

Relația (2.48)<sub>2</sub> exprimă teorema lui Varignon aplicabilă la acest sistem de vectori:

$$\bar{\mathcal{M}}_0 = \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{M}}_0(\bar{\mathbf{R}}) \quad (2.50)$$

Deoarece  $\bar{\mathbf{R}} \neq 0$  și  $\bar{\mathbf{R}} \bar{\mathcal{M}}_0 = 0$ , axa centrală este locul geometric al punctelor de moment minim egal cu zero; ea coincide cu suportul rezultantei.

Torsorul minimal are expresia:

$$\bar{\mathbf{T}}_{\min}(\mathbf{S}) = \begin{cases} \bar{\mathbf{R}} \neq 0 \\ \bar{\mathcal{M}}_{\min} = \frac{\bar{\mathbf{R}} \bar{\mathcal{M}}_0}{\bar{\mathbf{R}}^2} \bar{\mathbf{R}} = 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

4. Sistem format din doi vectori cu suporturile oarecare în spațiu.

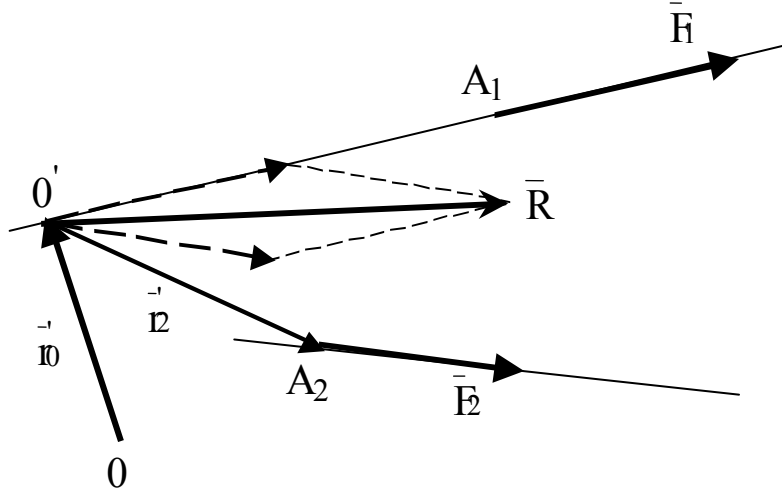


Fig. 2.12.

Se calculează torsorul acestui sistem de doi vectori în polul  $O'$  situat pe suportul vectorului  $\bar{F}_1$  (fig. 2.12). Relația de necoplanaritate a vectorilor  $\bar{F}_1$  și  $\bar{F}_2$  poate fi exprimată prin:

$$\bar{F}_1(\bar{r}_2 \times \bar{F}_2) \neq 0 \quad (2.52)$$

Caracteristicile în polul  $O'$  ale sistemului considerat, vor fi:

$$\begin{cases} \bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \neq 0 \\ \bar{\mathcal{M}}_{O'} = \bar{r}_1' \times \bar{F}_1 + \bar{r}_2' \times \bar{F}_2 - \bar{r}_2' \times \bar{F}_2 \neq 0 \\ \bar{R} \bar{\mathcal{M}}_{O'} = (\bar{F}_1 + \bar{F}_2)(\bar{r}_2' \times \bar{F}_2) = \bar{F}_1(\bar{r}_2' \times \bar{F}_2) + \bar{F}_2(\bar{r}_2' \times \bar{F}_2) = \bar{F}_1(\bar{r}_2' \times \bar{F}_2) \neq 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

Într-un pol oarecare  $O$  (care nu se află pe suporturile celor doi vectori din sistem) caracteristicile vor fi de asemenea toate diferite de zero:

$$\begin{cases} \bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \neq 0 \\ \bar{\mathcal{M}}_O = \bar{\mathcal{M}}_{O'} + \bar{r}_{O'} \times \bar{R} \neq 0 \\ \bar{R} \bar{\mathcal{M}}_O \neq 0 \end{cases} \quad (2.54)$$

### Torsorul minimal al sistemului

$$\bar{T}_{\min}(S) = \begin{cases} \bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \neq 0 \\ \bar{\mathcal{M}}_{\min} = \frac{\bar{R} \bar{\mathcal{M}}}{\bar{R}^2} \bar{R} \neq 0 \end{cases} \quad (2.55)$$

- vectorul rezultat  $\bar{R}$  ca invariant la schimbarea polului;
- momentul rezultat  $\bar{\mathcal{M}}_0$  în baza relației (2.49)<sub>2</sub> explicabilă din cauză că egalitatea cu zero ar implica coliniaritatea vectorilor  $\bar{\mathcal{M}}_0'$  și  $\bar{r}_0' \times \bar{R}$  și deci ortogonalitatea vectorilor  $\bar{\mathcal{M}}_0'$  și  $\bar{R}$ , contrazisă de relația (2.48)<sub>3</sub>  $\bar{R} \bar{\mathcal{M}}_0' = 0$ ;
- scalarul torsorului  $\bar{R} \bar{\mathcal{M}}_0$  ca invariant la schimbarea polului.

Axa centrală a acestui sistem de vectori este locul geometric al punctelor în care vectorul rezultat și momentul rezultat sunt coliniari (momentul rezultat are valoare minimă diferită de zero).

### c) Teorema de echivalență.

Reducerea unui sistem de vectori alunecători este justificată prin teorema de echivalență: “Două sisteme de vectori alunecători sunt echivalente între ele atunci când au același torsor (sau aceleași caracteristici) într-un pol arbitrar”.

### Reducerea sistemelor de vectori alunecători.

Teorema de echivalență conduce la concluzia că operația de înlocuire a unui sistem de vectori alunecători cu unul din cele patru sisteme simple de vectori care să fie echivalent cu el se reduce la:

- calculul componentelor torsorului într-un pol oarecare al acestui sistem (respectiv a caracteristicilor sistemului);

- compararea acestor componente cu cele corespunzătoare sistemelor simple de vectori alunecători.

Cazul spațial.

Calculând torsorul în 0 al unui sistem de vectori, se pot ivi următoarele patru situații:

I. Sistem echivalent cu zero:

$$\bar{\mathbf{R}} = 0, \quad \bar{\mathbf{M}}_0 = 0, \quad \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{M}}_0 = 0 \quad (2.56)$$

II. Sistem reductibil la un cuplu de vectori:

$$\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{0}}, \quad \bar{\mathbf{M}}_0 = \bar{\mathbf{M}}_{\text{cup}} \neq 0, \quad \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{M}}_0 = 0 \quad (2.57)$$

III. Sistem echivalent cu un vector unic (sau rezultantă unică):

$$\bar{\mathbf{R}} \neq 0, \quad \bar{\mathbf{M}}_0 \begin{cases} \neq 0 \\ = 0 \end{cases}, \quad \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{M}}_0 = 0 \quad (2.58)$$

Axa centrală coincide cu suportul rezultantei și are ecuația:

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\bar{\mathbf{R}} \times \bar{\mathbf{M}}_0}{\bar{\mathbf{R}}^2} + \lambda \bar{\mathbf{R}} \quad \text{când} \quad \bar{\mathbf{M}}_0 \neq 0 \quad (2.59)$$

și

$$\bar{\mathbf{r}} = \lambda \bar{\mathbf{R}} \quad \text{când} \quad \bar{\mathbf{M}}_0 = 0 \quad (2.60)$$

suportul rezultantei trecând prin pol.

Torsorul minimal:

$$\bar{\mathbf{T}}_{\min}(\mathbf{S}) = \begin{cases} \bar{\mathbf{R}} \neq 0 \\ \bar{\mathbf{M}}_{\min} = \frac{\bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{M}}}{\bar{\mathbf{R}}^2} \bar{\mathbf{R}} = 0 \end{cases} \quad (2.61)$$

IV. Sistem reductibil la un torsor propriu-zis:

$$\bar{\mathbf{R}} \neq 0, \quad \bar{\mathbf{M}}_0 \neq 0, \quad \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{M}}_0 \neq 0 \quad (2.62)$$



Torsorul minimal este de forma:

$$\bar{T}_{\min}(S) = \begin{cases} \bar{R} \neq 0 \\ \bar{\mathcal{M}}_{\min} = \frac{\bar{R} \bar{\mathcal{M}}_0}{\bar{R}^2} \bar{R} \neq 0 \end{cases} \quad (2.63)$$

iar axa centrală e determinată prin ecuația:

$$\bar{r} = \frac{\bar{R} \times \bar{\mathcal{M}}_0}{\bar{R}^2} + \lambda \bar{R} \quad (2.64)$$

Cazul plan.

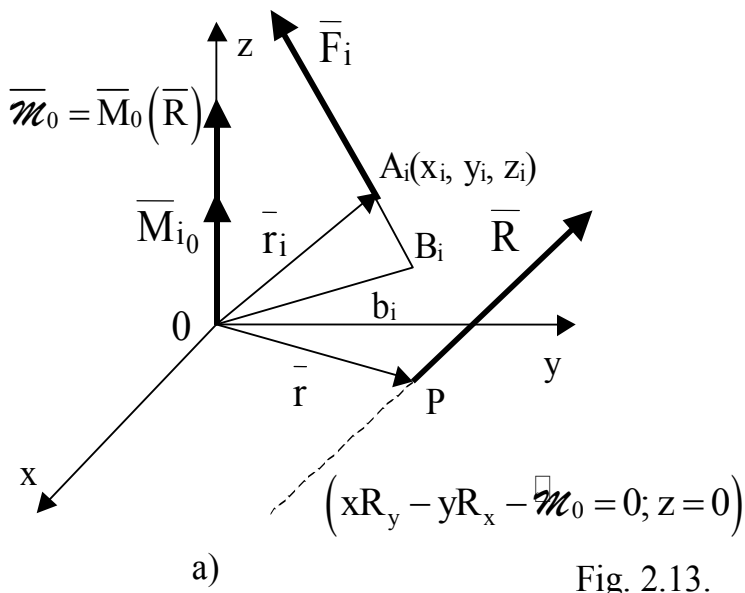


Fig. 2.13.

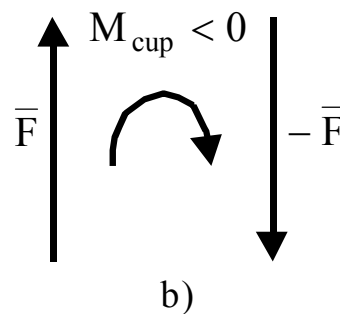
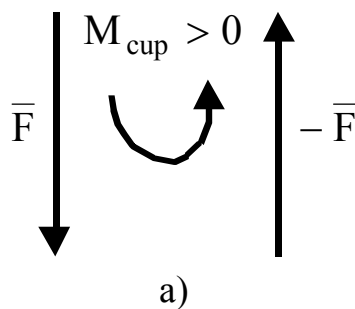
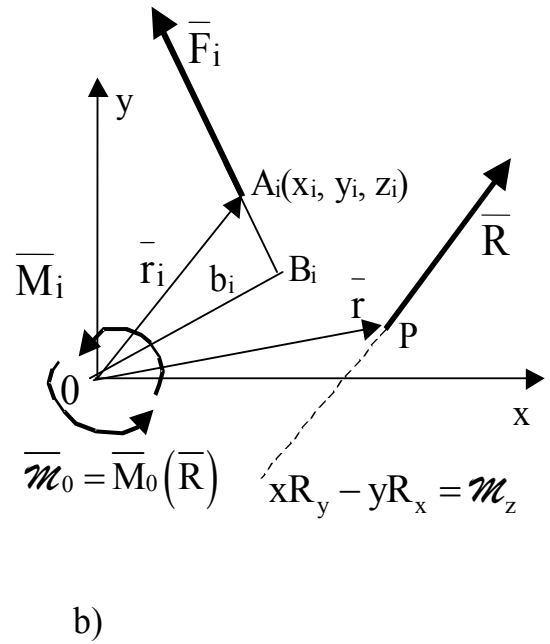


Fig. 2.14.

Se consideră sistemul de vectori coplanari  $(S) = \{\bar{F}_i\} (i = 1, 2, \dots, n)$  situați într-un plan de coordonate, spre exemplificare în planul  $Oxy$  (fig.2.13); fiecare vector  $\bar{F}_i$  din sistem va avea expresia analitică și momentul polar de forma:

$$\bar{F}_i = \bar{F}_{ix} \bar{i} + \bar{F}_{iy} \bar{j}; \quad \bar{M}_{i_0} = \bar{M}_{iz} \bar{k} = \pm b_i |\bar{F}_i| \bar{k} \quad (2.65)$$

Caracteristicile sistemului dat vor avea următoarele expresii:

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \left( \sum_{i=1}^n \bar{F}_{ix} \right) \bar{i} + \left( \sum_{i=1}^n \bar{F}_{iy} \right) \bar{j} \\ \bar{\mathcal{M}}_0 &= \sum_{i=1}^n \bar{M}_{i_0} = \left( \sum_{i=1}^n \tilde{M}_{i_0} \right) \bar{k} \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\bar{R} \bar{\mathcal{M}}_0 = 0$$

Sunt posibile următoarele cazuri de reducere:

- I.  $\bar{R} = 0; \bar{\mathcal{M}}_0 = \bar{0}$  – sistem echivalent cu zero;
- II.  $\bar{R} = 0; \bar{\mathcal{M}}_0 = \bar{M}_{cup} = \bar{0}$  – sistem echivalent cu un cuplu;

Momentul cuplului  $\bar{M}_{cup}$  este un vector perpendicular pe planul figurii; precizarea sensului lui  $\bar{M}_{cup}$  se efectuează printr-o săgeată curbilinie ce indică sensul de rotație al burghiului drept, situat perpendicular pe planul cuplului, sub acțiunea cuplului respectiv (fig. 2.14.).

- III.  $\bar{R} \neq 0; \bar{\mathcal{M}}_0 \begin{cases} \neq 0 \\ = 0 \end{cases}$  – sistem echivalent cu un vector unic, al cărui

suport coincide cu axa centrală de ecuație:

$$xR_y - yR_x = \tilde{\mathcal{M}}_0 \quad (2.67)$$

obținută prin efectuarea următoarelor calcule:

$$\mathcal{M}_0 = \overline{M}_0(\overline{R}) = \overline{r} \times \overline{R} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & 0 \\ R_x & R_y & 0 \end{vmatrix} = (xR_y - yR_x)\overline{k} \equiv \tilde{\mathcal{M}}_0 \overline{k} \quad (2.68)$$

Momentul minim  $\overline{\mathcal{M}}_{\min}$  este nul.